

Additional Mathematics

คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4

สมการ

ชื่อ .....

ชั้น ..... เลขประจำตัว .....

โรงเรียน .....

ครูผู้สอน....

พิชญุตม์ ราชเดิม(PunPitchy)

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ Best Friend Forever School

4.1 ทบทวนการแก้สมการพื้นฐาน

สมการ คือประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ที่มีเครื่องหมายเท่ากับขั้นตรงกลาง แสดงให้เห็นว่าทั้งสองฝั่งมีค่าเท่ากันทุกประการ เช่น 2+6=8 หากเป็นจริง ถูกต้องตามหลักการทางคณิตศาสตร์จะเรียกว่า “สมการเป็นจริง” แต่หากไม่ถูกต้องเช่น 2=0 เรียกว่า “สมการเป็นเท็จ”

การแก้สมการ ในทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การหาคำตอบของสมการ หรือการหาค่าของตัวแปรในสมการที่ทำให้สมการเป็นจริง โดยใช้หลักการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ สมการพื้นฐานสำหรับผู้ที่เริ่มต้นเรียนการแก้สมการในคณิตศาสตร์ เรียกว่า “สมการเชิงเส้น”

สมการเชิงเส้น คือสมการที่แต่ละพจน์ที่อยู่ในสมการเป็นการคูณระหว่างค่าคงตัวกับตัวแปรยกกำลัง1 จะมีดีกรีของพหุนามเท่ากับ 0 หรือ 1 เท่านั้น และเมื่อวาดออกมาเป็นกราฟจะได้กราฟเส้นตรง จึงถูกเรียกว่า สมการเชิงเส้น รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงเส้นในตัวแปร x และ y คือ

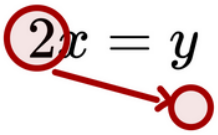
$$y = mx + c$$

สมการ หน้าที่ 2

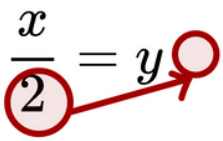
หลักการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

หลักการง่ายๆ => ถ้าย้ายบวกลบ

-> ย้ายจากบวกเป็นลบ จากลบเป็นบวก
**ย้ายจากน้อยไปหามาก แล้วสมการจะสวย
พิจราณา + - ดีๆ
=> ถ้าย้ายคูณหาร
-> ย้ายจากคูณไปหารหรือย้ายลงล่าง
ย้ายจากหารไปคูณ หรือย้ายขึ้น



$$x = \frac{y}{2}$$



$$x = y \times 2 = 2y$$

(แนวสอบจุดจุฬาภรณราชวิทยาลัย)

$$\frac{1+x}{2} - \frac{x-6}{4} + \frac{x}{3} = \frac{x+6}{3} \times \frac{3}{2} - \frac{x+3}{5}$$

สมการ หน้าที่ 3

สวมวิญญาณเด็กจภ. แล้วไปวันสอบสมการกันเลย!!

$$\frac{\frac{x}{2}+3\frac{1}{2}}{6}+\frac{x}{6}\times\frac{1}{\frac{1}{3}}+\frac{3x+6}{9}=\frac{x^2+8x}{3x}-\frac{2x-3}{6}$$

$$\frac{6x^2+3x}{3}\times\frac{1\frac{2}{5}}{x}+\frac{6x+8}{12}=\frac{x+\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x}}-\frac{2x^2}{2}+\frac{7x+1\frac{1}{2}}{3}$$

$$((\frac{2x}{3}+1\frac{4x}{2})^2)^2)^2=256$$

4.2 สมการยกกำลังสอง

สมการยกกำลังสอง คือ สมการที่เขียนอยู่ในรูปทั่วไป
ได้เป็นพหุนามดีกรีสอง ในรูปดังนี้

$$ax^2 + bx + c = 0$$

โดยที่ a เป็นสัมประสิทธิของพจน์กำลังสอง a เป็นจำนวนจริงใดๆที่ $a \neq 0$
b เป็นสัมประสิทธิของพจน์กำลังหนึ่ง b เป็นจำนวนจริงใดๆ
c เป็นสัมประสิทธิของพจน์กำลังศูนย์ c เป็นจำนวนจริงใดๆ
และ x เป็นคำตอบของสมการ โดยที่ x มีค่าเป็น

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

มีบทพิสูจน์ โดยนักคณิตศาสตร์คือ

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$ax^2 + bx = -c$$
$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$
$$x^2 + \frac{bx}{a} + (\frac{b}{2a})^2 = (\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}$$
$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$
$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

สมการ หน้าที่ 5

แบบฝึกหัด

$2x^2 + 3x - 5 = 0$

$6x^3 - 2x^2 + 6x = 0$

$8x^2 - 6x = 0$

$5x^2 + 6x - 7 = -2x^2 + 8x + 3$

$3x^3 - 9x^2 + 6x = -2x^3 + x^2 - 8x$

4.3 อสมการพื้นฐาน

อสมการ ในทางคณิตศาสตร์ คือประโยคที่อธิบายความสัมพันธ์ของจำนวนจริงสองจำนวน มีสัญลักษณ์แสดงความสัมพันธ์ ดังนี้

> แสดงความสัมพันธ์ มากกว่า
< แสดงความสัมพันธ์ น้อยกว่า
$\geq$ แสดงความสัมพันธ์ มากกว่าหรือเท่ากับ
$\leq$ แสดงความสัมพันธ์ น้อยกว่าหรือเท่ากับ

อสมการพื้นฐาน สำหรับผู้เริ่มต้นอสมการ คือ
“อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว”

พิจารณาอสมการดังต่อไปนี้

$$x + 1 < 3$$

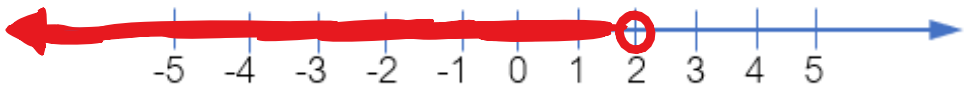
สมมติ
x = 3 จะทำให้อสมการเป็นเท็จ
x = 2 จะทำให้อสมการเป็นเท็จ
x = 1 จะทำให้อสมการเป็นจริง
x = (-2) จะทำให้อสมการเป็นจริง

แสดงว่า คำตอบของอสมการ คือ ค่า x ที่น้อยกว่า 2
จึงจะทำให้อสมการเป็นเท็จ
ดังนั้น บทนิยามของคำตอบของอสมการ
คือค่าตัวแปรที่ทำให้
อสมการเป็นจริง

สมการ หน้าที่ 7

>กราฟเส้นจำนวนแสดงคำตอบของอสมการ
•วงกลมทึบ จำนวนนั้นเป็นคำตอบด้วย
•วงกลมโปร่ง จำนวนนั้นไม่เป็นคำตอบ
•เส้นลากเชื่อม จำนวนที่ถูกลากเส้นผ่านเป็นคำตอบ

จาก x+1<3 จะได้ คำตอบของอสมการ คือจำนวนจริงใดๆที่น้อยกว่า 2
จึงจะได้ กราฟของคำตอบของอสมการ ดังภาพ



สมการ หน้าที่ 8

แก้อสมการดังต่อไปนี้ พร้อมวาดกราฟแสดงคำตอบของอสมการบนเส้นจำนวนให้ถูกต้อง

$x + 5 \geq 3$



$x + 8 \leq 7$



$2x + 6 > 9$



$5x - 3 \leq 2x$



$\frac{6x - 5}{2} > 3$



$\frac{9x + 2}{6} \geq \frac{7x - 5}{3}$



4.4 โจทย์ปัญหา

โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับ สมการ มีหลากหลายรูปแบบอย่างมาก
สำหรับในคอร์สนี้ จะมาเจาะลึก 1 เรื่องที่ออกข้อสอบบ่อย
คือเรื่อง “ปริมาณการเคลื่อนที่”

ปริมาณการเคลื่อนที่ เป็นเรื่องของ ความสัมพันธ์ระหว่าง
5 ตัวแปร ได้แก่
v อัตราเร็วปลาย (สเกลาร์) $\vec{v}$ ความเร็วปลาย (เวคเตอร์)
s ระยะทาง
t เวลา
u อัตราเร็วต้น (สเกลาร์) $\vec{u}$ ความเร็วต้น (เวคเตอร์)
a อัตราเร่ง (สเกลาร์) $\vec{a}$ ความเร่ง (เวคเตอร์)

5 ตัวแปรนี้มีความสัมพันธ์อยู่ในสมการพื้นฐาน ได้แก่

$$V = \frac{s}{t}$$

$$a = \frac{\Delta v}{t} = \frac{v - u}{t}$$

สมการ หน้าที่ 10

เพื่อหาความสัมพันธ์เพิ่มเติม นักฟิสิกส์จึงได้นำความสัมพันธ์เดิมนั้น มาสร้างเป็นความสัมพันธ์ใหม่ ด้วยความรู้ทางคณิตศาสตร์ ได้ 5 ความสัมพันธ์ได้แก่

$$v = u + at$$

$$S = \frac{(u+v)}{2}t$$

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$S = vt - \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = u^2 + 2as$$

สมการ หน้าที่ 11

พื้นที่สำหรับบทพิสูจน์ 5 สูตร

สมการ หน้าที่ 12

แบบฝึกหัด การเคลื่อนที่

1.อนุภาคเคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง คิดเป็นระยะทาง 200 เมตร ใช้เวลา 50 วินาที วัตถุมีอัตราเร็วเฉลี่ยเท่าใด

2.วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่เป็นวงกลม เมื่อเคลื่อนที่ครบ 1 รอบ ปรากฏว่าใช้เวลาไป 3 วินาที และพื้นที่ของวงกลมคิดเป็น 25π ตารางเมตร แล้ววัตถุมีความเร็วเฉลี่ยเท่าใด (ตอบติดค่า π)

3.นักวิทยาศาสตร์ชี้ว่ามีอุกกาบาตที่กำลังพุ่งเข้ามาหาโลก ด้วยความเร็วคงที่ 30 เมตรต่อวินาที ถ้าตอนนี้ อุกกาบาตนั้นอยู่ห่างออกไปราวๆ 200,000 กิโลเมตร จงหาว่าอุกกาบาตนี้จะชนโลกภายในกี่นาที

สมการ หน้าที่ 13

4.ออสซี่โยนวัตถุที่ติดเครื่องต้านแรงโน้มถ่วง
ทำให้วัตถุนี้เคลื่อนที่ในแนวขนานกับแกน x ตลอดทาง ไปยังนนท์
ถ้าวัตถุมีความเร็ว 5 เมตรต่อวินาที และมีความเร่ง 2 เมตรต่อ
วินาทียกกำลังสอง และระยะห่างระหว่างออสกับนนท์เป็น
60 เมตร จงหาเวลาที่ทำให้วัตถุนี้เดินทางไปถึงนนท์

5.ลาล่าโยนของลงมาจาก Helicopter ที่กำลังขึ้นเป็นเส้นตรงที่ขนาน
กับแกน y ด้วยความเร็ว 10 เมตรต่อวินาที ถ้าความสูงของ
Helicoperตอนที่โยนห่างจากพื้นดิน 500 เมตร จงหาว่าเวลา
ที่สิ่งของตกถึงพื้น Helicoper อยู่สูงจากพื้นดินกี่กิโลเมตร

สมการ หน้าที่ 14

6.รถ A และรถB เคลื่อนที่จากจุดเดียวกัน รถ A เริ่มเคลื่อนที่จากจุดหยุดนิ่ง โดยมีความเร่ง 3 เมตรต่อวินาทียกกำลังสอง และ รถ B เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ 20 เมตรต่อวินาที จงหา

6.1 เมื่อเวลาผ่านไป 10 วินาทีรถทั้งสองอยู่ห่างกันกี่เมตร และรถใดนำอยู่

6.2 รถทั้งสองจะเจอกันที่เวลากี่วินาที

สมการ หน้าที่ 15

จดเพิ่มเติม แนวข้อสอบวัดผล

คณิตศาสตร์คือภาษาที่
พระเจ้าใช้สร้างจักรวาลนี้ขึ้นมา

กาลิเลโอ กาลิเลอี
(นักดาราศาสตร์ นักฟิสิกส์
และวิศวกรชาวอิตาลี)